Mihael Mihalcea • Mihaela Molodeț • Radu-Cătălin Gherghe

Teste rezolvate de matematică pentru reușita la EXAMENUL de TITULARIZARE

R&S RENTROP & STRATON

www.portalinvatamant.ro

Portal ÎNVĂȚĂMÂNT

Mihael Mihalcea, Mihaela Molodeţ, Radu-Cătălin Gherghe

Teste de matematică pentru reuşita la examenul de titularizare

R&S RENTROP & STRATON

București

TESTE

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 4 ore.**

Testul nr. 1

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Se dă ecuația $m\cos^2 x-2(m-1)\cos x+m+1=0$, unde $m\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Arătați că pentru $m=\frac{1}{2}$, ecuația nu are soluții.

5p **b)** Pentru $m=0$, rezolvați ecuația în $(\pi,3\pi)$.

5p **c)** Determinați numerele reale m pentru care ecuația are soluții.

2. Se consideră prisma patrulateră regulată $ALGORITM$ cu $AL=a$, $AR=2a$, unde $a\in\mathbb{R}_+^*$.

5p **a)** Arătați că dacă $d(M,AT)=1$, atunci $a<1{,}1$.

5p **b)** Aflați valoarea reală a numărului a pentru care volumul prismei este egal cu $\left(14+10\sqrt{2}\right)cm$.

5p **c)** Fie $B\in(AR)$, $C\in(IL)$ astfel încât $BR=2IC=a$. Dacă $(BCT)\cap MO=\{D\}$, calculați $\sin(\sphericalangle DBC)$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Pe mulțimea $M=[1,+\infty)$, se definește legea de compoziție $x\circ y=1+\log_2 x+\log_2 y$.

5p **a)** Calculați $1\circ 2-2\circ 1$.

5p **b)** Arătați că Arătați că $2^4\circ\left(2^3\circ 2^4\right)=2^3$.

5p **c)** Aflați numerele naturale m și n pentru care $2^m\circ 2^n=2^{m+n}$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left|2x^2-x-1\right|$.

5p **a)** Stabiliți domeniul de derivabilitate al funcției.

5p **b)** Studiați monotonia funcției pe intervalul $[-1,1]$.

5p **c)** Calculați $\int_{-1}^{1} f(x)dx$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

Următoarea secvență face parte din programa școlară de matematică pentru clasa a VII-a.

Competențe specifice și exemple de activități de învățare

Clasa a VII-a
1.1. Identificarea numerelor aparținând diferitelor submulțimi ale lui $\mathbb{R}$.$\mathbb{R}$

– Identificarea pătratelor unor numere naturale dintr-o enumerare de numere date *– Identificarea, în exemple relevante, a relației între puterea cu exponent 2 și rădăcina pătrată a pătratului unui număr natural* *– Identificarea rădăcinii pătrate din pătratul unui număr natural utilizând scrierea sub formă de putere cu exponent 2* *– Recunoașterea numerelor naturale, întregi, raționale* *– Recunoașterea unui număr irațional dintr-o mulțime de numere date* *– Identificarea unei forme convenabile de scriere a unui număr real în funcție de un context dat*
2.1. Aplicarea regulilor de calcul pentru estimarea și aproximarea numerelor reale *– Scrierea unui număr real în diverse forme* *– Aproximarea unui număr real și reprezentarea acestuia pe axa numerelor* *– Determinarea opusului, a modulului și a inversului unui număr real* *– Compararea numerelor reale utilizând modulul, aproximări, încadrarea unui număr real între doi întregi consecutivi, scoaterea factorilor de sub radical, introducerea factorilor sub radical*
3.1. Utilizarea unor algoritmi și a proprietăților operațiilor în efectuarea unor calcule cu numere reale *– Utilizarea regulilor de calcul pentru produsul/raportul a doi radicali și pentru raționalizarea numitorului* *– Utilizarea de raționalizări sau introducerea/scoaterea factorilor de sub radical pentru a compara/ordona numere iraționale* *– Calcularea modulului unor sume/diferențe de numere iraționale* *– Calcularea puterii cu exponent număr întreg a unui număr real nenul* *– Exersarea regulilor privind ordinea efectuării operațiilor cu numere reale* *– Utilizarea calculatorului pentru efectuarea sau verificarea unor calcule cu numere reale* *– Utilizarea distributivității înmulțirii față de adunare/scădere în exerciții de desfacere a parantezelor*
4.1. Folosirea terminologiei aferente noțiunii de număr real (semn, modul, opus, invers) *– Sortarea unor numere naturale, întregi, raționale sau iraționale în funcție de mulțimea căreia îi aparțin utilizând terminologia adecvată* *– Utilizarea terminologiei specifice noțiunii de număr real în descrierea modului de rezolvare a unui exercițiu/a unei probleme* *– Identificarea rezultatului corect dintr-o listă de răspunsuri posibile*
5.1. Elaborarea de strategii pentru rezolvarea unor probleme cu numere reale *– Determinarea mediei geometrice a două numere reale pozitive* *– Determinarea mediei aritmetice ponderate a două sau mai multor numere reale* *– Raționalizarea unor numitori de forma a b cu a b,* $\in \mathbb{R}\ \mathbb{Q}_+$ *– Scrierea adecvată a unor rapoarte de numere reale care necesită raționalizare, descompunere în factori și/sau simplificare* *– Rezolvarea de probleme în care apar medii (aritmetică ponderată sau geometrică)*
6.1. Modelarea matematică a unor situații practice care implică operații cu numere reale ---- *– Formularea de probleme pornind de la un set de informații obținute din cotidian sau din diverse domenii*

– Verificarea validității unor afirmații pe cazuri particulare sau prin construirea unor exemple și/sau contraexemple
– Rezolvarea unor probleme cu conținut practic, utilizând proprietățile operațiilor cu numere reale

Domeniu de conținut	Conținuturi
Mulțimi. Numere	**1. MULȚIMEA NUMERELOR REALE** ● Rădăcina pătrată a pătratului unui număr natural; estimarea rădăcinii pătrate dintr-un număr rațional ● Scoaterea factorilor de sub radical; introducerea factorilor sub radical ● Numere iraționale, exemple; mulțimea numerelor reale; incluziunile $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$ $\mathbb{N}$; modulul unui număr real (definiție, proprietăți)[1]; compararea și ordonarea numerelor reale; reprezentarea numerelor reale pe axa numerelor prin aproximări ● Operații cu numere reale (adunare, scădere, înmulțire, împărțire, puteri cu exponent număr întreg); raționalizarea numitorului de forma $a\sqrt{b}$ ● Media aritmetică ponderată a n numere reale, $n \geq 2$; media geometrică a două numere reale pozitive ● Ecuația de forma $x^2 = a$, unde $a\in\mathbb{R}$

Notă: Conținuturile vor fi abordate din perspectiva competențelor specifice. Activitățile de învățare sugerate oferă o imagine posibilă privind contextele de formare/dezvoltare a acestor competențe.

(Programa școlară pentru disciplina Matematică, OMEN nr. 3393/28.02.2017)

Folosind informaţiile din secvenţa de mai sus, în vederea evaluării formării/dezvoltării competenţelor specifice precizate, elaboraţi o probă de evaluare la finalul unităţii de învăţare „Mulţimea numerelor reale”, care să cuprindă 6 itemi: un item de completare, un item cu răspuns scurt, un item de tip pereche, un item de tip alegere multiplă, un item de tip întrebare structurată şi un item de tip rezolvare de probleme.

Notă. Pentru fiecare dintre itemii elaboraţi se punctează menţionarea competenţei specifice evaluate, respectarea formatului itemului, elaborarea răspunsului aşteptat (baremul de evaluare) şi corectitudinea ştiinţifică a informaţiei de specialitate.

[1] La definirea noțiunii de modul se va insista pe reprezentarea lui pe axa numerelor și pe semnificația sa ca distanță.

SUGESTIE
DE REZOLVARE

Testul nr. 1

SUBIECTUL I

1. a) $m=\frac{1}{2}\Rightarrow$ ecuația devine: $\frac{1}{2}\cos^2 x-2\left(\frac{1}{2}-1\right)\cos x+\frac{1}{2}+1=0 \Leftrightarrow \cos^2 x+2\cos x+3=0$

Notăm $\cos x=t \;\Rightarrow t^2+2t+3=0$, ecuație pentru care $\Delta=2^2-4\cdot 1\cdot 3=4-12=-8<0$

$\Rightarrow t\notin\mathbb{R}\Rightarrow \cos x\notin\mathbb{R}$ fals.

$\Rightarrow$ ecuația nu are soluții.

1. b) $m=0\Rightarrow$ ecuația devine: $0\cdot\cos^2 x-2(0-1)\cos x+0+1=0 \Leftrightarrow 2\cos x+1=0$

$\Leftrightarrow \cos x=-\frac{1}{2}\Rightarrow x=x=\pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$

Dar $x\in(\pi,3\pi)$

Pentru $n=0\Rightarrow x=\frac{2\pi}{3}<\pi$ sau $x=-\frac{2\pi}{3}<0<\pi$ (1)

Pentru $n=1\Rightarrow \pi<x=\frac{2\pi}{3}+2\pi=\frac{8\pi}{3}<\frac{9\pi}{3}=3\pi$ sau $x=-\frac{2\pi}{3}+2\pi=\frac{4\pi}{3}>\frac{3\pi}{3}=\pi, \frac{4\pi}{3}<\frac{9\pi}{3}=\pi$ (2)

Pentru $n\geq 2, \frac{2\pi}{3}+2n\pi\geq\frac{2\pi}{3}+4\pi>3\pi$ iar $-\frac{2\pi}{3}+2n\pi\geq-\frac{2\pi}{3}+4\pi=\frac{10\pi}{3}>\frac{9\pi}{3}=3\pi$ (3)

Din (1), (2), (3) $\Rightarrow x\in\left\{\frac{4\pi}{3},\frac{8\pi}{3}\right\}$

1. c) Notăm $\cos x=t \;\Rightarrow$ ecuația devine $mt^2-2(m-1)t+m+1=0$

Cum $\cos x\in[-1,1]$, ecuația noastră va avea soluții dacă pentru ecuația în t avem cel puțin o soluție în intervalul $[-1,1]$.

Identificăm cazurile:

Cazul 1. Avem soluția $t=-1$, $\Rightarrow m-2(m-1)(-1)+m+1=0\Rightarrow m+2m-2+m+1=0$

$\Rightarrow 4m=1\Rightarrow m=\frac{1}{4}$ (4)

Cazul 2. Avem soluția $t=1$, $\Rightarrow m-2(m-1)+m+1=0\Rightarrow m-2m+2+m+1=0$

$\Rightarrow 0m=-3$ Imposibil (5)

Pentru celelalte cazuri avem nevoie de semnul lui Δ

$\Delta = b^2 - 4ac = \left[-2(m-1)\right]^2 - 4\cdot m\cdot(m+1) = 4m^2 - 8m + 4 - 4m^2 - 4m = -12m + 4$

$\Delta = 0 \Leftrightarrow -12m + 4 = 0 \Leftrightarrow -12m = -4 \Leftrightarrow m = \dfrac{-12}{-4} \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{3}$

Semnul lui Δ este:

m	$-\infty$		0		$\frac{1}{3}$			$+\infty$
Δ	+		|	+	0	-	-	-

Pentru $m = 0$ nu avem ecuație de gradul al II-lea. Cazul $m = 0$ a fost analizat la subpunctul b), de unde deducem că pentru $m = 0$ avem soluții. (6)

Cazul 3. $\begin{cases} \Delta = 0 \\ -1 < t_V = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{2(m-1)}{2m} < 1 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \begin{cases} m = \dfrac{1}{3} \\ -1 < \dfrac{\cancel{2}_1\left(\frac{1}{3}-1\right)}{\cancel{2}_1\cdot\frac{1}{3}} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \dfrac{1}{3} \\ -1 < -2 < 1 \end{cases}$ Fals (7)

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(t) = mt^2 - 2(m-1)t + m + 1,\ m\in\mathbb{R}^*$,funcția de gradul al II-lea, pentru care avem:

$a = m, b = -2(m-1), c = m+1$

Iar

$f(-1) = 4m - 1$

$f(1) = 3$

Cazul 4. $m \neq 0$ și $\begin{cases} \Delta > 0 \\ t_1 < -1 < t_2 < 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \in \left(-\infty, \dfrac{1}{3}\right)\setminus\{0\} \\ a\cdot f(-1) < 0 \\ a\cdot f(1) > 0 \\ -\dfrac{b}{2a} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \setminus\{0\} \begin{cases} m \in \left(-\infty, \dfrac{1}{3}\right)\setminus\{0\} \\ m\cdot(4m-1) < 0 \Rightarrow m \in \left(0, \dfrac{1}{4}\right) \\ m\cdot 3 > 0 \Rightarrow m \in (0, +\infty) \\ \dfrac{\cancel{2}_1(m-1)}{\cancel{2}_1 m} < 1 \Rightarrow m \in (0, +\infty) \end{cases} \Rightarrow m \in \left(0, \dfrac{1}{4}\right)$ (8)

Pentru că $\dfrac{m-1}{m} < 1 \Leftrightarrow \cancel{1} - \dfrac{1}{m} < \cancel{1} \Leftrightarrow \dfrac{1}{m} > 0 \Leftrightarrow m > 0 \Rightarrow m \in (0.+\infty)$

Cazul 5. $m \neq 0$ și $\begin{cases} \Delta > 0 \\ -1 < t_1 < t_2 < 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \setminus \{0\} \\ a \cdot f(-1) > 0 \\ a \cdot f(1) > 0 \\ -1 < -\frac{b}{2a} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \setminus \{0\} \\ m \cdot (4m-1) > 0 \Rightarrow \\ m \cdot 3 > 0 \\ -1 < \frac{m-1}{m} < 1 \end{cases} \begin{cases} m \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \setminus \{0\} \\ m \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{4}, +\infty\right) \\ m \in (0, +\infty) \\ m \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow m \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right) \quad (9)$$

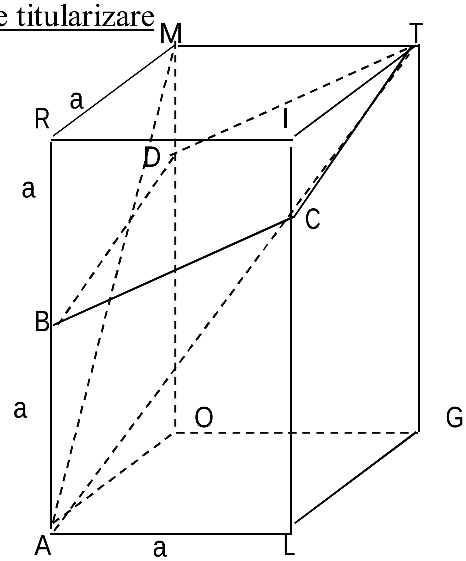
Pentru că $-1 < \frac{m-1}{m} < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-m-m+1}{m} < 0 \Leftrightarrow \frac{-2m+1}{m} < 0 \Rightarrow m \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \\ \cancel{1} - \frac{1}{m} < \cancel{1} \Leftrightarrow \frac{1}{m} > 0 \Leftrightarrow m > 0 \Rightarrow m \in (0. + \infty) \end{cases} \Leftrightarrow m \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, unde am ținut cont că $\frac{-2m+1}{m}$ are semnul expresiei $m(-2m+1)$ care se anulează, evident, în $\frac{1}{2}$.

Cazul 6. $m \neq 0$ și $\begin{cases} \Delta > 0 \\ -1 < t_1 < 1 < t_2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \setminus \{0\} \\ f(-1) \cdot f(1) < 0 \\ -\frac{b}{2a} > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \setminus \{0\} \\ (4m-1) \cdot 3 < 0 \Rightarrow m \in \left(-\infty, \frac{1}{4}\right) \\ \frac{m-1}{m} > -1 \Rightarrow m \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right) \end{cases} \Rightarrow m \in (-\infty, 0) \quad (10)$$

Din (4) - (10) $\Rightarrow m \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$.

2. a)



$TM \perp MR; TM \perp MO; MR \cap MO = \{M\}; MR, MO \subset (RMO)\ TM \perp (RMO)$

Dar $MA \subset (RMO) \Rightarrow TM \perp MA \Rightarrow \Delta MAT$ dreptunghic în M

$$\Rightarrow d(M, AT) = \frac{MA \cdot MT}{AT}$$

$$\Delta MAR, \sphericalangle R = 90^\circ \overset{T.P.}{\Rightarrow} MA = \sqrt{AR^2 + RM^2} = \sqrt{(2a)^2 + a^2} = \sqrt{4a^2 + a^2} = \sqrt{5a^2} = a\sqrt{5}$$

ΔMAT dreptunghic în $M \overset{T.P.}{\Rightarrow} AT = \sqrt{AM^2 + MT^2} = \sqrt{5a^2 + a^2} = \sqrt{6a^2} = a\sqrt{6}$

$$\Rightarrow 1 = d(M, AT) = \frac{MA \cdot MT}{AT} = \frac{a\sqrt{5} \cdot \cancel{a}_1}{\cancel{a}_1\sqrt{6}} = \frac{a\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$$

$$\Rightarrow a = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}$$

Rămâne de demonstrat că $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}} = a < 1,1$

$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}} < 1,1 \Leftrightarrow \sqrt{6} < 1,1\sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{6} < \sqrt{5 \cdot 1,1^2} \Leftrightarrow \sqrt{6} < \sqrt{5 \cdot 1,21} \Leftrightarrow \sqrt{6} < \sqrt{6,05} \Leftrightarrow 6 < 6,05$ Adevărat.

$\Rightarrow$ Dacă $d(M, AT) = 1$, atunci $a < 1,1$.

2. b)

$$V_{ALGORITM} = A_B \cdot h = A_{ALGO} \cdot AR = AL^2 \cdot AR = a^2 \cdot 2a = 2a^3$$

$$V_{ALGORITM} = 14 + 10\sqrt{2} \Leftrightarrow 2a^3 = 2\left(7 + 5\sqrt{2}\right) \Leftrightarrow a^3 = 7 + 5\sqrt{2}$$

$$7 + 5\sqrt{2} = 1 + 3\sqrt{2} + 6 + 2\sqrt{2} = 1^3 + 3 \cdot 1^2 \cdot \sqrt{2} + 3 \cdot 1 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^3 = \left(1 + \sqrt{2}\right)^3$$

Am folosit formula $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$

$\Rightarrow a^3=\left(1+\sqrt{2}\right)^3 \Leftrightarrow a=\left(1+\sqrt{2}\right)cm$

Am folosit că ecuația $x^3=a^3 \Leftrightarrow x=a$ în $\mathbb{R}$.

Justificare: $x^3=a^3 \Leftrightarrow x^3-a^3=0 \Leftrightarrow (x-a)\left(x^2+xa+a^2\right)=0$

$\Rightarrow x-a=0 \Rightarrow x=a$

sau $x^2+ax+a^2=0 \Rightarrow \Delta=a^2-4a^2=-3a^2<0, (a<0) \Rightarrow$ nu avem soluții reale.

Dacă $a=0$ Ecuația $x^3=a^3 \Leftrightarrow x^3=0 \Leftrightarrow x=0$.

2. c)

Cunoaștem rezultatul: „Un plan intersectează două plane paralele după două drepte paralele”.
Cum fețele opuse ale prismei determină plane paralele, vom avea că
$BC \parallel DT, CT \parallel BD \Rightarrow BCTD$ paralelogram. (1)

În $\Delta CIT, \sphericalangle I=90^\circ \overset{T.P.}{\Rightarrow} CT=\sqrt{IC^2+IT^2}=\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}=a\frac{\sqrt{5}}{2}$ (2)

Fie $E\in AR$ a.î. $CE\perp AR \Rightarrow CERI$ dreptunghi, $CE=a, ER=IC=\frac{BR}{2}=\frac{a}{2}$

$BE=BR-ER=a-\frac{a}{2}=\frac{a}{2}$ Analog cu calculul lui CT, vom avea că $BC=a\frac{\sqrt{5}}{2}$ (3)

Din (1), (2), (3) $\Rightarrow BCTD$ romb.

Vom calcula aria rombului în două feluri:

$A_{BCTD}=\frac{CD\cdot BT}{2}=\frac{a\sqrt{2}\cdot a\sqrt{3}}{2}=\frac{a^2\sqrt{6}}{2}$ (4)

$A_{BCTD}=BC\cdot BD\cdot \sin\left(\sphericalangle DBC\right)=BC^2\cdot \sin\left(\sphericalangle DBC\right)=\left(\frac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2\cdot \sin\left(\sphericalangle DBC\right)=\frac{5a^2}{4}\cdot \sin\left(\sphericalangle DBC\right)$ (5)

Pentru că $CD=MI=a\sqrt{2}$

Și $BT=\sqrt{RT^2+RB^2}=\sqrt{2a^2+a^2}=\sqrt{3a^2}=a\sqrt{3}$

Din (4) și (5) $\frac{a^2\sqrt{6}}{2}=\frac{5a^2}{4}\cdot \sin\left(\sphericalangle DBC\right) \Rightarrow \sin\left(\sphericalangle DBC\right)=\frac{2\sqrt{6}}{5}$.

SUBIECTUL al II-lea

1. a)

$1\circ 2-2\circ 1=1+\log_2 1+\log_2 2-\left(1+\log_2 2+\log_2 1\right)=1+0+1-(1+1+0)=0$.

Observație: se poate justifica răspunsul și în felul următor: legea de compoziție este, evident, comutativă, ceea ce conduce la $1\circ 2=2\circ 1\Rightarrow 1\circ 2-2\circ 1=0$.

1. b)

$2^4\circ\left(2^3\circ 2^4\right)=2^4\circ\left(1+\log_2 2^3+\log_2 2^4\right)=2^4\circ\left(1+3+4\right)=2^4\circ 8=2^4\circ 2^3=1+\log_2 2^4+\log_2 2^3=1+4+3=8=$

1. c)

Să remarcăm că pentru $m,n\in\mathbb{N}$ vom avea că

$2^m\geq 2^0=1$

$2^n\geq 2^0=1$

$2^{m+n}\geq 2^0=1$

Deci ecuația este bine definită pentru orice numere naturale.

Observăm că $m=n=0$ reprezintă o soluție a ecuației noastre, pentru că

$$2^0\circ 2^0=1+\log_2 2^0+\log_2 2^0=1+0+0=1=2^0=2^{0+0}=2^{m+n}$$

Observăm că $m=1,n=0$ reprezintă o soluție a ecuației noastre, pentru că

$$2^1\circ 2^0=1+\log_2 2^1+\log_2 2^0=1+1+0=2=2^1=2^{1+0}=2^{m+n}$$

Și $m=0,n=1$ reprezintă o soluție a ecuației noastre, pentru că

$$2^0\circ 2^1=1+\log_2 2^0+\log_2 2^1=1+0+1=2=2^1=2^{0+1}=2^{m+n}$$

Observăm că $m=1,n=1$ nu reprezintă o soluție a ecuației noastre, pentru că

$$2^1\circ 2^1=1+\log_2 2^1+\log_2 2^1=1+1+1=3\neq 4=2^2=2^{1+1}=2^{m+n}$$

Vom demonstra că ecuația nu mai are alte soluții.

$2^m\circ 2^n=2^{m+n}\Leftrightarrow 1+\log_2 2^m+\log_2 2^n=2^{m+n}\Leftrightarrow=1+m+n=2^{m+n}$

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f\left(x\right)=2^x-x-1$

Evident, f continuă, derivabilă, fiind compunere de funcții elementare, deci derivabile.

$f'\left(x\right)=2^x\ln 2-1$

Determinăm punctele critice:

$f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow 2^x\ln 2-1=0\Leftrightarrow 2^x=\dfrac{1}{\ln 2}\Rightarrow x\ln 2=\ln\left(\dfrac{1}{\ln 2}\right)\Rightarrow x=\dfrac{\ln\left(\dfrac{1}{\ln 2}\right)}{\ln 2}$; am logaritmat expresia, în baza e.

$$0=\ln 1<\ln 2<\ln e=1 \Rightarrow 1<\frac{1}{\ln 2}$$

$$1=\ln e<\ln 4=\ln 2^2=2\ln 2 \Rightarrow \frac{1}{\ln 2}<2$$

$$\Rightarrow 1<\frac{1}{\ln 2}<2 \Rightarrow 0=\ln 1<\ln\left(\frac{1}{\ln 2}\right)<\ln 2 \,\Big|: \ln 2 \Leftrightarrow 0<\frac{\ln\left(\frac{1}{\ln 2}\right)}{\ln 2}<1$$

Bineînțeles, am folosit faptul că funcția ln este strict crescătoare, baza fiind $e=2,71...$ deci supraunitară și ln2 pozitiv, deci se păstrează inegalitățile la împărțirea cu ln2.

Fie $\alpha=f\left(\frac{\ln\left(\frac{1}{\ln 2}\right)}{\ln 2}\right)$

Tabelul de variație este:

x	$-\infty$		0		$\frac{\ln\left(\frac{1}{\ln 2}\right)}{\ln 2}$		1		2		$+\infty$
f'	-	-	-		0	+		+		+	+
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	α	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Așadar, funcția noastră este strict crescătoare pentru valori mai mari ca 2

$$f(x)>f(2), \forall x>2 \Leftrightarrow f(x)>1>0, \forall x>2$$

Deci $2^x-x-1>1, \forall x>2 \Leftrightarrow 2^x-x-1>0, \forall x>2$

Pentru $m,n\in\mathbb{N}, m>1, n>1 \Rightarrow m+n>2 \Rightarrow 2^{m+n}-m-n-1>0 \Rightarrow 2^{m+n}>m+n+1$

$\Rightarrow$ ecuația $1+m+n=2^{m+n}$ nu are soluții.

În concluzie, mulțimea soluțiilor ecuației este $\{(0,0);(0,1);(1,0)\}$

Observație: în tabelul de variație am trecut următoarele valori:

$f(0)=2^0-0-1=1-0-1=0$, $f(1)=2^1-1-1=2-1-1=0$, $f(2)=2^2-2-1=4-2-1=1$

De asemenea, din tabelul de variație se poate deduce că ecuația $f(x)=0$ are doar rădăcinile $0,1$, deci revenind la ecuația noastră , om avea ca soluție toate perechile de numere naturale pentru care $m+n=0$ sau $m+n=1$, adică $\{(0,0);(0,1);(1,0)\}$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(2^x-x-1)=0-(-\infty)-1=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(2^x-x-1)=\lim_{x\to+\infty}2^x\left(1-\frac{x}{2^x}-\frac{1}{2^x}\right)=+\infty(1-0-0)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2^x}\underset{l'Hospital}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2^x\ln 2}=\frac{1}{\infty}=0$$

2. a) Funcția modul este derivabilă cu excepția punctelor în care acesta se anulează. Explicităm modulul, determinând, pe ramuri, expresia funcției noastre:

$$f(x)=\left|2x^2-x-1\right|=\begin{cases}2x^2-x-1, x\geq 0\\ -\left(2x^2-x-1\right), x<0\end{cases}$$

$$f(x)=0\Leftrightarrow 2x^2-x-1=0$$

$$a=2, b=-1, c=-1$$

$$\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4\cdot 2\cdot(-1)=1+8=9>0$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1\pm 3}{4}\Rightarrow x_1=1, x_2=-\frac{1}{2}$$

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$2x^2-x-1$	+		2	+	0	$-$	0	+	+

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}2x^2-x-1, x\in\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]\\ -2x^2+x+1, x\in\left(-\frac{1}{2},1\right)\\ 2x^2-x-1, x\in[1,+\infty)\end{cases}$$

Evident, pe $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{1}{2},1\right),(1,+\infty)$ funcția este continuă, derivabilă, fiind compunere de funcții elementare. (1)

Rămâne de analizat derivabilitatea în $-\frac{1}{2},1$.

Folosim consecința teoremei lui Lagrange:

$$\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}\left(2x^2-x-1\right)', x\in\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\\ \left(-2x^2+x+1\right)', x\in\left(-\frac{1}{2},1\right)\\ \left(2x^2-x-1\right)', x\in(1,+\infty)\end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases}4x-1, x\in\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\\ -4x+1, x\in\left(-\frac{1}{2},1\right)\\ 4x-1, x\in(1,+\infty)\end{cases}$$

$$\lim_{x\nearrow-\frac{1}{2}} f'(x)=\lim_{x\nearrow-\frac{1}{2}}(4x-1)=\cancel{4}_2\left(-\frac{1}{\cancel{2}_1}\right)-1=-2-1=-3 \quad (2)$$

$$\lim_{x\searrow-\frac{1}{2}} f'(x)=\lim_{x\searrow-\frac{1}{2}}(-4x+1)=-\cancel{4}_2\left(-\frac{1}{\cancel{2}_1}\right)+1=2+1=3 \quad (3)$$

$$\lim_{x\nearrow 1} f'(x)=\lim_{x\nearrow 1}(-4x+1)=-4\cdot1+1=-3 \quad (4)$$

$$\lim_{x\searrow 1} f'(x)=\lim_{x\searrow 1}(4x-1)=4\cdot1-1=3 \quad (5)$$

Din (2) și (3) $\Rightarrow$ funcția nu este derivabilă în $-\frac{1}{2}$ (6)

Din (4) și (5) $\Rightarrow$ funcția nu este derivabilă în 1 (7)

Din (1), (6) și (7) $\Rightarrow$ funcția este derivabilă pe $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2},1\right\}$

2. b) Pe intervalul cerut, funcția noastră este:

$$f(x)=\begin{cases}2x^2-x-1, x\in\left[-1,-\frac{1}{2}\right]\\ -2x^2+x+1, x\in\left(-\frac{1}{2},1\right]\end{cases}$$

Am dedus expresia funcției, preluând din forma anterioară și ținând cont de continuitatea în $x=1$.

x	-1		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{4}$		1
$2x^2-x-1$	2	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{9}{8}$	$\nearrow$	0
$f(x)'=4x-1$	-5	$-$	$\vert$				
$f(x)'=-4x+1$			$\vert$	$+$	0	$-$	$\vert$
$\left\|2x^2-x-1\right\|$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{9}{8}$	$\searrow$	0

$x_V=-\frac{b}{2a}=-\frac{-1}{2\cdot 2}=\frac{1}{4}$, $y_V=-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{9}{4\cdot 2}=-\frac{9}{8}$

Am folosit că $4x-1<0\Leftrightarrow 4x<1\Leftrightarrow x<\frac{1}{4}$, $-4x+1<0\Leftrightarrow -4x<-1\Leftrightarrow x>\frac{1}{4}$.

Din tabelul de variație avem că funcția este strict descrescătoare pe $\left[-1,-\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{4},1\right]$

și strict crescătoare pe $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$.

În concluzie: funcția nu este monotonă pe $[-1,1]$.

2. c)

Funcția este continuă pe $[-1,1]$, deci integrabilă, aplicăm proprietatea de „aditivitate la interval” și vom avea că

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx=\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} f(x)dx+\int_{-\frac{1}{2}}^{1} f(x)dx=\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}\left(2x^2-x-1\right)dx+\int_{-\frac{1}{2}}^{1}\left(-2x^2+x+1\right)dx=$$

$$=\left(2\cdot\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-x\right)\Bigg|_{-1}^{-\frac{1}{2}}+\left(-2\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg|_{-\frac{1}{2}}^{1}=$$

$$=2\cdot\frac{-\frac{1}{8}}{3}-\frac{\frac{1}{4}}{2}+\frac{1}{2}-\left(-\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+1\right)-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+1-\left(-2\cdot\frac{-\frac{1}{8}}{3}+\frac{\frac{1}{4}}{2}-\frac{1}{2}\right)=$$

$$=-\frac{1}{12}-\frac{1}{8}+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-1-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+1-\frac{1}{12}-\frac{1}{8}+\frac{1}{2}=-\frac{2}{12}-\frac{2}{8}+2={}^{12)}2-{}^{2)}\frac{1}{6}-{}^{3)}\frac{1}{4}=\frac{24-2-3}{12}=\frac{19}{12}$$

SUBIECTUL al III-lea

Menționez, pentru început, contextul ipotetic în care propun testul solicitat:
– Nivelul clasei este unul mediu;
– Materia a fost abordată integral pentru capitolul propus;
– Evaluarea:

- va fi internă, efectuată în timpul cursurilor, de către profesorul care predă la clasă;
- este de proces, urmărind rezultatul propriu-zis;
- este normativă, itemii fiind elaborați în concordanță cu norma clasei și ținând cont de derularea evaluării formative, în care s-a pus accent în special pe evaluarea formatoare;
- este frontală, aplicându-se tuturor elevilor clasei;
- este formală, testul fiind anunțat;
- este sumativă, fiind evaluate competențele dobândite pentru un întreg capitol;
- este pedagogică, vizând formarea competențelor;
- este în domeniul cognitiv;
- este cantitativă, rezultatele fiind cuantificate în baza punctajului.

– Se va ține cont de Principiile didactice

- Accesibilității și individualității
- Legării teoriei de practică
- Însușirii temeinice a cunoștințelor
- Sistematizării și continuității

Matricea de specificații

Nr. crt.	**CONŢINUTURI**	**Punctaj**	**COMPETENŢE DE EVALUAT** (asociate nivelurilor cognitive)					
			1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1.	Rădăcina pătrată a pătratului unui număr natural	10p					**6 (10p)**	
2.	Mulţimea numerelor reale	20p	**1 (10p)**			**2 (10p)**		
3.	Operaţii cu numere reale	60p		**4 (10p)**	**3 (20p)**			**5a,b,c (30p)**
	Total	90p	**10**	**10**	**20**	**10**	**10**	**30**

Testul propus:
1. Item cu răspuns scurt, pentru evaluarea competenței 1.1
Numărul elementelor iraționale din mulțimea $M=\left\{\sqrt{0},\sqrt{1},\sqrt{2},\ldots,\sqrt{25}\right\}$ este egal cu ...

2. Item de completare, pentru evaluarea competenței 4.1:

Se consideră numerele: $\sqrt{0{,}16}$, $\sqrt{0{,}(16)}$, $\sqrt{16}$. Dintre ele, numărul .... este irațional.

3. Item de tip pereche, pentru evaluarea competenței 3.1.

Asociați fiecărei expresii din coloana A, valoarea corespunzătoare din coloana B.

A	B
1. $2\sqrt{81}-3\sqrt{9}$	a) 1
2. $\frac{\lvert 2\sqrt{3}-9\rvert}{2\sqrt{3}-9}$	b) -1
3. $\sqrt{72}-\sqrt{8}$	c) 9
4. $\left(-\sqrt{3}\right)^4$	d) -9
5. $\left(\frac{3}{2}\sqrt{12}-4\sqrt{27}\right):\left(-\sqrt{3}\right)$	e) $4\sqrt{3}$
	f) $\sqrt{96}$
	g) $-\sqrt{48}$
	h) $4\sqrt{2}$

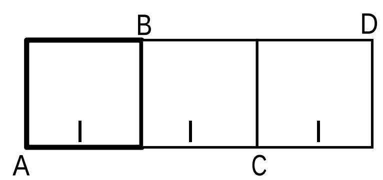
4. Item de tip alegere multiplă, pentru evaluarea competenței 2.1

Alegeți varianta corectă de răspuns: Inversul numărului $\sqrt{2}$ este egal cu

A) $-\sqrt{2}$ B) $\sqrt{2}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D) $2\sqrt{2}$

5. Item de tip întrebare structurată, pentru evaluarea competenței 6.1:

O grădină în formă de dreptunghi, ca în figură, are lungimea de trei ori mai mare decât lățimea, aria fiind egală cu $7500m^2$.



a) Calculați lățimea grădinii.

b) Pentru a proteja culturile, proprietarul a montat sârmă ghimpată pe gardul care înconjoară grădina. Aflați câți metri de sârmă ghimpată a folosit.

c) Pentru amenajare, se delimitează gradina cu alei astfel: $A \to B \to C \to D$. Încadrați între două numere naturale consecutive lungimea dată de parcursul aleilor (adică lungimea traseului $A \to B \to C \to D$).

6. Item de tip rezolvare de probleme pentru evaluarea competenței 5.1:

Determinați numerele naturale de forma $\overline{ab}$ știind că a și b sunt rădăcinile pătrate ale unor cifre, $a \neq b$.

Punctaj:

10 puncte din oficiu

Câte 10 puncte fiecare din itemii 1, 2, 4, 6

Câte 10 puncte pentru 5 a), 5 b), 5 c)

Câte 4 puncte pentru fiecare asociere corectă de la itemul 3.

Nota se va obține împărțind la 10 punctajul total acordat.

Precizări: la itemii 1, 2, 4 se acordă punctajul maxim pentru răspuns corect, punctaj 0 pentru răspuns greșit sau niciun răspuns. La itemul 3 se acordă punctajul maxim pentru fiecare asociere corectă, punctajul 0 pentru asociere greșită sau nicio asociere. La itemii 5, 6 se acordă punctaje intermediare pentru rezolvări incomplete.

Rezolvare:

1. 20
2. $\sqrt{0,(16)}$
3. 1. $\rightarrow c)$
   2. $\rightarrow b)$
   3. $\rightarrow h)$
   4. $\rightarrow c)$
   5. $\rightarrow c)$
4. C
5. a) $A_{grădină} = l \cdot L = l \cdot 3l = 3l^2 \Rightarrow 7500 = 3l^2 \Rightarrow l^2 = \frac{7500}{3} \Rightarrow l^2 = 2500 \Rightarrow l = \sqrt{2500} \Rightarrow l = 50m$

b) Lungimea sârmei este egală cu perimetrul grădinii, adică $2l + 2L$

$L = 3l \Rightarrow L = 3 \cdot 50 = 150m \Rightarrow 2l + 2L = 2 \cdot 50 + 2 \cdot 150 = 100 + 300 = 400m$

$\Rightarrow$ Lungimea sârmei este egală cu $400m$.

c) $AB = BC = CD = l\sqrt{2}$

$AB + BC + CD = 3l\sqrt{2} = 3 \cdot 50\sqrt{2} = 150\sqrt{2} = \sqrt{2 \cdot 150^2} = \sqrt{2 \cdot 22500} = \sqrt{45000}m$

$212^2 = 44944 < 45000 < 45369 = 213^2$

$\Rightarrow 212 = \sqrt{212^2} < \sqrt{45000} < \sqrt{213^2} = 213$

6. $\overline{ab} \Rightarrow a, b$ cifre, $a \neq 0$.

Deci trebuie să găsim cifrele care sunt rădăcini pătrate ale unor pătrate perfecte, care să fie cifre.

Doar cifrele $0,1,4,9$ sunt pătrate perfecte.

Avem că $0=\sqrt{0}, 1=\sqrt{1}, 2=\sqrt{4}, 3=\sqrt{9}$.

$\Rightarrow a\in\{1,4,9\}$ iar $b\in\{0,1,4,9\}$.

Așadar, numerele sunt: $10,12,13,20,21,23,30,31,32$.

Barem de corectare și notare:

1. 20. 10p
2. $\sqrt{0,(16)}$ 10p
3. 1. $\rightarrow c)$ 4p
   2. $\rightarrow b)$ 4p
   3. $\rightarrow h)$ 4p
   4. $\rightarrow c)$ 4p
   5. $\rightarrow c)$ 4p
4. C 10p
5. a) $A_{grădină}=l\cdot L=l\cdot 3l=3l^2$ 4p

$l=50m$ 6p

b) Lungimea sârmei este egală cu perimetrul grădinii, adică $2l+2L$ 2p

$L=150m$ 4p

Lungimea sârmei este egală cu $400m$ 4p

c) $AB=BC=CD=l\sqrt{2}$ 2p

$AB+BC+CD=\sqrt{45000}m$ 4p

$212<\sqrt{45000}<213$ 4p

6. $\overline{ab}\Rightarrow a,b$ cifre, $a\neq 0$ 2p

Doar cifrele $0,1,4,9$ sunt pătrate perfecte 2p

$\Rightarrow a\in\{1,4,9\}$ iar $b\in\{0,1,4,9\}$ 4p

Numerele sunt: $10,12,13,20,21,23,30,31,32$ 2p

Timp de lucru: 50 de minute.

Toate subiectele sunt obligatorii.